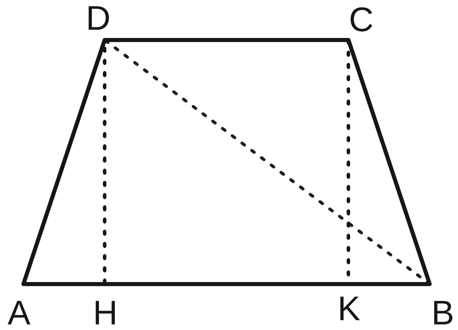
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (27/11/2023)
SOLUZIONI

1. IL CACCIATORE DI TAGLIE [529]

Le ultime tre cifre di 2023^2 sono le stesse di $23^2 = 529$ per le note proprietà della moltiplicazione.

2. LA MISSIONE DI MANDO [100]



Dobbiamo calcolare la misura della diagonale del trapezio. Sfruttiamo il triangolo DBH, dove H è il piede dell'altezza mandata dal vertice D.
La misura di HB la possiamo trovare grazie al fatto che il trapezio è isoscele: $AH = KB = \frac{AB - CD}{2} = \frac{100 - 60}{2} = 20 \text{ m}$ e quindi $HB = HK + KB = CD + KB = 60 + 20 = 80 \text{ m}$.
$DB = 100 \text{ m}$. Infatti 60 e 80 formano una terna pitagorica con 100. In alternativa, facendo i conti con il Teorema di Pitagora.

3. IL PRIMO INDOVINELLO PER IL BAMBINO [1348]

Innanzi tutto osserviamo che i multipli di 4 minori di 2023 sono già stati scritti dal primo giocatore.
I numeri multipli di 2, minori di 2023 si ottengono dalla divisione di 2023 per 2 senza considerare il resto: $2023 : 2 = 1011$.
I numeri multipli di 3, minori di 2023 sono analogamente $2023 : 3 = 674$.
Di questi, quelli scritti due volte sono i multipli di 6 che sono $2023 : 6 = 337$.
I numeri scritti dall'ultimo giocatore sono $1011 + 674 - 337 = 1348$.

4. IL SOGNO DEL BAMBINO [18]

Il problema può essere risolto in maniera più efficiente sfruttando la scrittura algebrica dei numeri. In questo caso, però, possiamo anche contare a ritroso verificando ciascun caso:

Anno	Somma delle cifre	Età
2022	6	1
2021	5	2
2020	4	3
2019	12	4
2018	11	5
2017	10	6
2016	9	7
2015	**8**	**8**

2014	7	9
2013	6	10
2012	5	11
2011	4	12
2010	3	13
2009	11	14
2008	10	15
2007	9	16
2006	8	17

2005	7	18
2004	6	19
2003	5	20
2002	4	21
2001	3	22
2000	2	23
1999	28	24
1998	27	25
1997	**26**	**26**

La differenza tra le età è $26 - 8 = 18$.

5. IL MUDHORN [105]

Siccome $144 = 12^2$, dovrà essere che $3n - 33 = 12$ oppure $3n - 33 = -12$. Il problema ha due soluzioni: $n = 15$ e $n = 7$. Il loro prodotto vale $15 \cdot 7 = 105$

6. IL SECONDO INDOVINELLO PER IL BAMBINO [246]
Scriviamo il problema utilizzando il numero $\overline{ABC}$: L'operazione è:

$$\begin{array}{ccc}A & B & C & + \\ & A & B & + \\ & A & C & + \\ & B & C & = \\ \hline 3 & 4 & 2 & \end{array}$$

Osserviamo che A non può essere 3 in quanto il suo solo contributo poterebbe la somma ad essere almeno 360. D'altra parte, A non può essere nemmeno 1 in quanto, anche mettendo 9 al posto di B non potremmo mai raggiungere quota 340. $A=2$.

$$\begin{array}{cccc}2 & B & C & + \\ & 2 & B & + \\ & 2 & C & + \\ & B & C & = \\ \hline 3 & 4 & 2 & \end{array}$$

Osserviamo la colonna delle decine. Non può essere che $B=5$ visto che la prima colonna non dovebbe dare alcun riporto, ma così non potrebbe mai essere 2
$B=4$ e di conseguenza $C=6$:

$$\begin{array}{cccc}2 & 4 & 6 & + \\ & 2 & 4 & + \\ & 2 & 6 & + \\ & 4 & 6 & = \\ \hline 3 & 4 & 2 & \end{array}$$

Il numero cercato è 246.

7. IL LATTE DI BANTHA [200]
Dopo il primo prelievo, nella cisterna restano 600 litri.

Dopo il secondo ne restano $\frac{2}{3}\cdot 600=400$ litri.

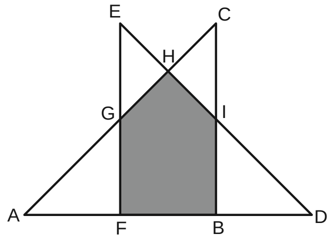
Dopo il terzo prelievo ne restano $\frac{3}{4}\cdot 400=300$ litri.

Dopo il quarto ne restano $\frac{4}{5}\cdot 300=240$ litri.

Dopo l'ultimo prelievo ne restano $\frac{5}{6}\cdot 240=200$ litri.

8. LA PESCA DEL KRILL [1125]
Osserviamo che $AF=FB=BD=GF=EG=CI=IB=30\text{ m}$.
Calcoliamo l'area del pentagono irregolare come somma tra l'area del quadrato $FBIG$ e il triangolo GHI.

$$A_{FBIHG}=A_{FBIG}+A_{GHI}=\frac{FB^2}{2}+\frac{GI^2}{4}=\frac{30^2}{2}+\frac{30^2}{4}=1125\text{ m}^2$$



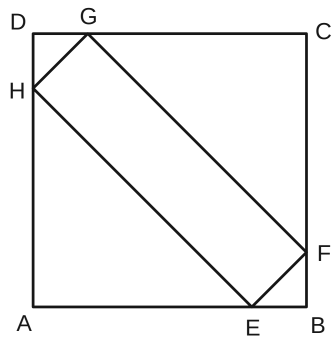
9. IL LIBRO DI MANDO [2652]
La somma dei numeri da 1 a 100 è $\frac{100\cdot 101}{2}=5050$. Togliendo 4947 resta 103 che è la somma di due pagine consecutive, ed in particolare di 51 e 52, il cui prodotto vale $51\cdot 52=2652$

10. IL GIOCO DEI TUSKEN [13]
Rappresentiamo tutti i casi possibili mediante una tabella Sulla prima riga mettiamo i risultati possibili del primo giocatore, in colonna quelli del secondo. Indichiamo con V quando il secondo giocatore vince:

	1	2	3	4	5	6
1	V	V				
2	V	V	V			
3		V	V	V		
4			V	V	V	
5				V	V	V
6					V	V

La probabilità cercata è $P = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.
Il valore richiesto è $4+9=13$.

11. IL DRAGO KRAYT [3200]



Prima soluzione
Possiamo calcolare l'area per differenza:

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - 2A_{AEG} - 2A_{EBF} = 100^2 - 2\cdot\frac{80^2}{2} - 2\cdot\frac{20^2}{2} = 3200 \text{ m}^2.$$

Seconda soluzione
$EFGH$ è un rettangolo di lati $20\sqrt{2}$ e $80\sqrt{2}$ e quindi la sua area vale
$A_{EFGH} = 20\sqrt{2}\cdot 80\sqrt{2} = 3200 \text{ m}^2$.

12. SUL PIANETA CORVUS [198]
Dalla colonna delle unità, osserviamo che $A+B=10$, visto che C è anche la cifra del risultato. Osservando la colonna delle decine possiamo sostenere che $B=C+1$, visto che sono gli stessi addendi della colonna delle unità e non c'è lo stesso risultato.
A questo punto possiamo concludere che $A=1$, $B=9$ e $C=8$. Il numero cercato è 198.

$$\begin{array}{r} AA+ \\ BB+ \\ \underline{CC=} \\ ABC \end{array}$$

13. IL BOSCO DI AHSOKA [4950]
Dalle informazioni del problema abbiamo che all'inizio vi sono 9900 alberi di cui 9801 erano pini e 99 abeti. Calcoliamo ora il 100% sapendo che 99 è il ora il 2% del totale:
$100\% : x = 2\% : 99$:
$x = \frac{100\cdot 99}{2} = 4950$ di cui $4950-99=4851$ sono pini
Il numero dei pini distrutti dalla tempesta è $9801-4851=4950$.

14. GROGU [20]
10^{100} è una cifra "1" seguita da 100 zeri, mentre $100^{10} = \left(10^2\right)^{10} = 10^{20}$ è una cifra "1" seguita da 20 zeri. A causa del riporto, solo questi ultimi rimarranno dopo la differenza tra i due valori.
La risposta è 20.

15. LA CATTURA DI GROGU [99]
Con la premessa del problema precedente, abbiamo che dopo la somma, dei 100 zeri del primo numero, solo la $21°$ cifra (dal fondo) cambierà diventando un "1".
La risposta è 99.

16. PRIGIONIERO SULL'INCROCIATORE [100]
Il problema è indipendente dalla cifra A. Infatti, togliendo an antrambi i lati dell'equazione il numero $\overline{AA}$, abbiamo $x \cdot A = 100A$ e quindi $x = 100$.

17. IN CERCA DI AIUTO [5555]
I numeri che posso scrivere con quattro cifre tutte diverse sono $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Il dodicesimo e il tredicesimo sono l'ultimo numero che inizia con la cifra "2" (2431) e il primo con la cifra "3" (3124).
Il risultato cercato è $2431 + 3124 = 5555$.

18. LA SPADA OSCURA [2184]
Se chiamiamo a, b e c le misure dei tre lati della scatola, sappiamo che $ab = 168$, $bc = 273$ e $ac = 104$. Noi cerchiamo il valore del volume: $V = abc$.
Moltiplicando tra loro i valori noti per le aree abbiamo: $ab \cdot ac \cdot bc = a^2b^2c^2 = (abc)^2$.
Si ottiene quindi:

$$V = \sqrt{168 \cdot 273 \cdot 104} = \sqrt{\left(2^3 \cdot 3 \cdot 7\right) \cdot \left(3 \cdot 7 \cdot 13\right) \cdot \left(2^3 \cdot 13\right)} = \sqrt{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2} = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 2184 \text{ cm}^3.$$

19. IL SALVATAGGIO [840]
Aiutiamoci con la fattorizzazione dei vari prodotti.
5 e 7 si posizionano subito visto che solo in 40 e in 270 può comparire il fattore 5 e solo in 84 e in 336 compare il fattore 7. Indichiamo nelle celle laterali i valori che restano da trovare:

		7	12
			16
5			54
8	27	48	

Osserviamo che $27 = 3^3$ e solo 54 contiene un fattore 3^2. Questo permette di chiudere lo schema:

4	3	7	
2	1	8	
5	9	6	

La risposta richiesta è $4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 = 840$.

20. GROGU È AFFIDATO A LUKE SKYWALKER [9]
Eseguiamo i calcoli uno alla volta:

$$\sqrt{1+10\sqrt{1+9\sqrt{1+8\sqrt{1+7\sqrt{1+6\sqrt{1+5\sqrt{1+4\sqrt{1+3}}}}}}}} = \sqrt{1+10\sqrt{1+9\sqrt{1+8\sqrt{1+7\sqrt{1+6\sqrt{1+5\sqrt{1+4 \cdot 2}}}}}}} =$$

$$\sqrt{1+10\sqrt{1+9\sqrt{1+8\sqrt{1+7\sqrt{1+6\sqrt{1+5 \cdot 3}}}}}} = \sqrt{1+10\sqrt{1+9\sqrt{1+8\sqrt{1+7\sqrt{1+6 \cdot 4}}}}} = \sqrt{1+10\sqrt{1+9\sqrt{1+8\sqrt{1+7 \cdot 5}}}} =$$

$$\sqrt{1+10\sqrt{1+9\sqrt{1+8 \cdot 6}}} = \sqrt{1+10\sqrt{1+9 \cdot 7}} = \sqrt{1+10 \cdot 8} = 9.$$